一、图形的对称

在自然界，到处都可见到对称，最多见的是左右对称．例如，人体的外形就左右对称，动、植物界也充满了左右对称(如图 1-1)．



图 1-1

人类在改造自然界的过程中，经过成千上万年的实践，逐渐认识到对称的物体美观大方，受力均匀，平衡稳定，并且建造起来也较方便．于是，人们设计、制造了大量的对称形状的

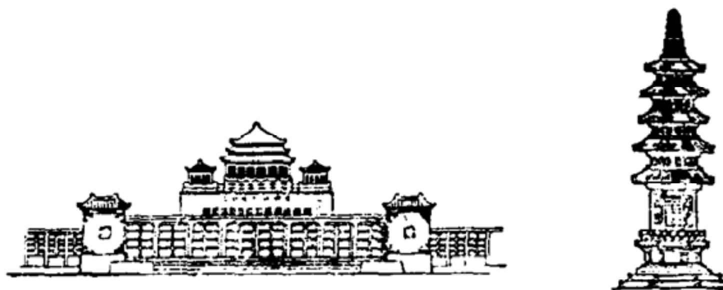


图 1-2

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

日用器皿、工艺美术品，古建筑和现代大型建筑也大都具有对称性(如图 1-2).

当然，数学中的对称概念，要比上述生活直觉中理解的对称的概念广泛得多,并且图形的对称性还往往和图形的变换联系着，以下逐一加以讨论.

1. 反射变换和反射对称图形

图 1-3 是一幅花布的图样. 这里，只要告诉你某一角的图案,就可以想象出整个画面. 所以，设计这幅花布图样时，只需画出其四分之一即可(图 1-4).

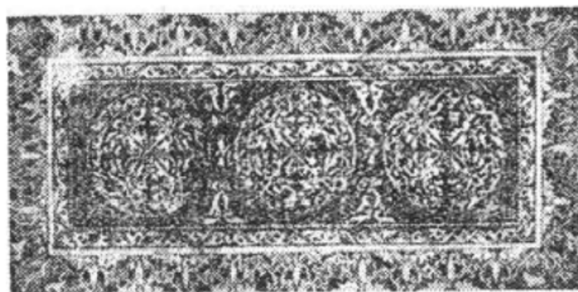


图 1-3



图 1-4

怎样从其右下角的图案来得到右上角的图案呢？具体说来,我们可以先将图 1-4 描在一张透明纸上，再以直线 Ox 为轴,把透明纸绕轴线 Ox 翻转 180°, 便得到了一个新的图形. 运用同样的方法，我们可以从右半图形出发得到左半图形. 里,把一个平面图形绕一直线翻转的结果，是和通常的照镜子相仿的,我们把这种翻转叫做反射变换，确切地说,一个图形 F ,通过一个假想镜面 σ，使在镜面中得到一个新的图形 F', 这种从 F 到 F' 的过程叫做关于镜面 σ 的反射变换，记作

$$\sigma: F \to F'.$$

并且，镜面 σ 叫做反射面(或叫对称面),图形 F' 叫做图形 F

的象．

这种在镜中的图形 F'，是可以运用平面镜的成象原理，用几何作图的方法而得出的．如镜面 XY 前有一点 A，它在镜面中的象 A' 可如下作出：过点 A 作直线 XY 的垂线 AB，垂足为点 B；延长 AB 至 A'，使 $AB=BA'$，则点 A' 即为点 A 关于镜面 XY 反射变换下的象(图 1-5)．

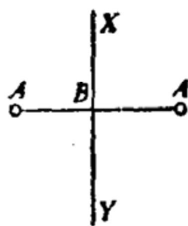


图 1-5

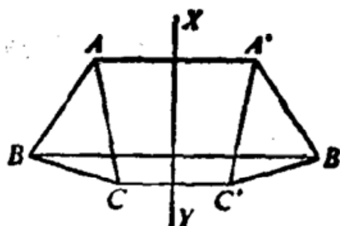


图 1-6

根据同样的道理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于镜面 XY 反射变换下的象 F' 即为 $\triangle A'B'C'$(图 1-6)．这里，点 A 与 A'、点 B 与 B' 点 C 与 C' 分别是对应点，并且是一一对应的；线段 AB 与 $A'B'$、AC 与 $A'C'$、BC 与 $B'C'$ 分别是对应线段；$\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$、$\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角．可以证明：

$$AB=A'B'、\quad BC=B'C'、\quad CA=C'A',$$

$$\angle BAC=\angle B'A'C'、\quad \angle ABC=\angle A'B'C'、$$

$$\angle BCA=\angle B'C'A',$$

并且 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

可见一个图形 F 经过反射变换，能保持对应线段的长度不变，对应角的角度不变，并且，图形 F 和它在反射变换下的象 F' 是全等的图形．当然，F 和 F' 不一定重合．就是说，通过反射变换，一个图形的位置是可能改变的．

对于一个图形 F，如果存在这样一个镜面 σ，使 F 在关

于 σ 的反射变换下的象 F' 能和原图形 F 重合，即变换前后的图形重合，我们把这样的图形叫做反射对称图形．

显然，本书一开头所讲到的那些生活直觉中很为多见的"对称"，都是这里所说的反射对称图形．反射变换下的对应点、对应线段、对应角相应地叫做这一反射对称图形的对称点、对称线段、对称角．

2．旋转变换和旋转对称图形

图 1-7 是一张雪花结晶图．如果我们想象在中心处有一根垂直纸面的直线，那么当将雪花图绕该直线顺时针方向旋转过 $60°$ 度时，旋转前后的图形就会重合．同样地，绕定直线旋转 $120°$、$180°$、$240°$、$300°$、$360°$ 时，旋转前后的图形也会重合．以下我们把雪花图那样的图形也作为一种对称图形，不过与前述反射对称图形不同．



图 1-7

一般地说，一个图形 F，绕某一固定直线、按一定方向旋转某个角度 α 后，形成一个新的图形 F'，这种从图形 F 转到 F' 的过程，叫做图形关于一固定直线的旋转变换；固定直线叫做旋转对称轴（也叫旋转轴），角 α 称为旋转角；图形 F' 是 F 关于旋转变换下的象．记作 $c: F \to F'$．

图形关于旋转变换的象，可以通过几何作图方法得到．现在先来看关于点 A 的象 A' 的作图方法（图 1-8）．令 L 为旋转轴，A 点在平面 π 上，L 和 π 垂直并且交于 O 点（O 为 L 在 π 上的垂足）．连结 AO；在平面 π 上，以 O 为圆心、以 OA 为半径画弧；在此弧上依逆时针方向截取 $AA'=\alpha$，得到点 A'，

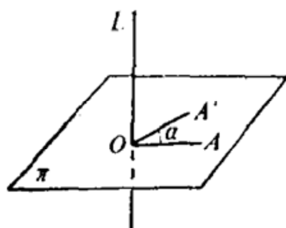


图 1-8

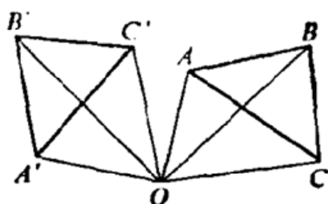


图 1-9

即为点 A 关于旋转轴 L 的旋转变换下的象.

根据同样道理,如果图形 F 为 $\triangle ABC$, 那么它关于旋转轴 L 旋转 α 角度后的象 F' 即是 $\triangle A'B'C'$(图 1-9). 其中点 A 与 A', 点 B 与 B'、点 C 与 C' 分别是对应点, 并且是一一对应的; 线段 AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段; 角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$、$\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角. 容易证明

$$OA=OA'、\quad OB=OB'、\quad OC=OC',$$

$$\angle AOA'=\angle BOB'=\angle COC'=\alpha.$$

也就是说, 通过旋转变换, 每双对应点到旋转轴的距离相等; 每双对应点和 O 联线之间的夹角都等于旋转角 α. 由此可以证明: 图形 F 在旋转变换后得到象 F', F 中任意两点的距离、角度和 F' 中对应点间距离、对应角度相等. 特别地,有

$$AB=A'B'、\quad BC=B'C'、\quad CA=C'A',$$

$$\angle ABC=\angle A'B'C'、\quad \angle BCA=\angle B'C'A'、$$

$$\angle BAC=\angle B'A'C',$$

即

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

可见, 旋转变换和反射变换是一样的, 既保持长度不变, 又保持角度不变, 它们都是保长变换, 又是保角变换. 图形 F 与旋转变换后的象 F' 是全等图形. 但一般情况下, F 和 F' 的位置是不一样的.

一个图形 F，如果能找到一固定轴，把图形绕该轴旋转适当角度后得到象 F'，并且 F 和 F' 重合，即旋转变换前后的图形重合，我们就称它为旋转对称图形．旋转变换下的对应点、对应线段、对应角度分别叫做这一旋转对称图形的对称点、对称线段、对称角度．

花冠、蜂巢、正齿轮等等都是旋转对称图形的实例．

在旋转过程中，图形旋转一周，可能重合的次数 n，称为这一图形的旋转对称次数，并且也称为该旋转轴的次数，即可称该轴为 n 次旋转轴．例如:正方形,它的旋转对称轴是过对角线的交点,并且垂直正方形所在平面的直线．显然,当正方形绕该轴旋转一周时,图形能重合 4 次,所以它为 4 次旋转对称图形,该旋转轴为 4 次旋转轴．再来看圆形．垂直圆心的直线是旋转轴，当绕此轴旋转一周时，能与本身重合无数次，因此我们说圆形具有无限次旋转轴，圆形是无限次旋转对称图形．另外,海星、水母、苹果花等具有 5 次旋转轴,是 5 次对称图形．桔子、橙子、柿子、柠檬等的横截面分别可以是 7 次、8 次、9 次、10 次旋转对称图形等．

3．反演变换和反演对称图形

照相机摄象时，物与象的关系如图 1-10．

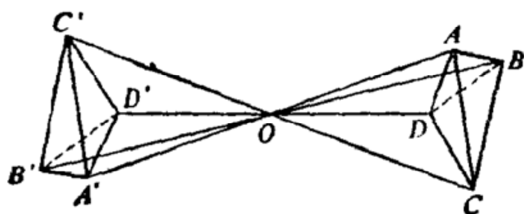


图 1-10

把一个图形 F 上的点和定点 O 联结，并作反方向相等延长，从而得到 F'，这种从 F 到 F' 的过程，叫做图形 F 关于 O

点的反演变换，定点 O 叫做反演中心．记作 $i.\ F\to F'$

反演变换也可以用几何方法表示，图形 F 的象 F' 可以用作图方法得到．我们先来作一点 A，经过以 O 为反演中心的反演变换后的象 A'．方法如下：连结点 A 和点 O，并延长至点 A'，使得 $OA=OA'$，此时，点 A' 就是点 A 在反演变换下的象（图 1-11）．

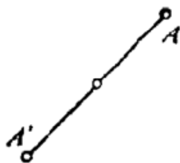


图 1-11

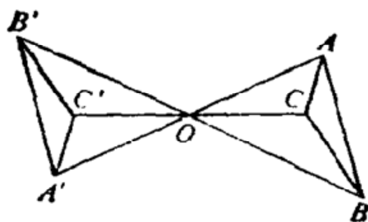


图 1-12

根据同样的道理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于 O 点的反演变换下的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$（图 1-12）．点 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 是反演变换下的对应点，并且是一一对应的；线段 AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$ 是对应线段；角 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$、$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$、$\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 是对应角．由于对应点到反演中心的距离是相等的，即

$$OA=OA'、\quad OB=OB'、\quad OC=OC',$$

并且

$$\angle AOB=\angle A'OB'、\quad \angle BOC=\angle B'OC'、$$
$$\angle COA=\angle C'OA',$$

所以，可以证明：对应线段、对应角也相等，即有

$$AB=A'B'、\quad AC=A'C'、\quad BC=B'C'$$
$$\angle BAC=\angle B'A'C'、\quad \angle ACB=\angle A'C'B'、$$
$$\angle CBA=\angle C'B'A'.$$

并且 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

可见反演变换也是保长变换、保角变换．反演变换前后的图形也是全等图形．当然，一般情况下，变换前后的图形位置是变化的．

一个图形 F，如果能找到一定点 O，使得 F 在以 O 为反演中心的反演变换后的象 F' 与 F 重合，即变换前后的图形重合，我们就把这个图形叫做反演对称图形．例如：正方形、菱形、圆、正六面体等都是反演对称图形．但是锥体和台体就不是反演对称图形．

4．平移变换和平移对称图形

图 1-13 是二方连图案．它的特点是，整个图形可以看作由截出的某个图形单位，不断向二方连续扩展而成．二方连可以看作由单位图形按水平方向连续平行移动而得的图形．



图　1-13

一个图形 F，按某向量 $\boldsymbol{a}$ 移动后，得到图形 F'，这个过程称为关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换．记作

$$T:\ F \to F',$$

$\boldsymbol{a}$ 称为平移向量．一个平移变换完全由平移向量决定．

平移变换也可通过几何作图实施．我们先来作出一点 A 经过平移变换后的象 A'，方法如下：过点 A 作向量 $\boldsymbol{a}$，使得 A 点为向量的起点，这时向量的终点 A' 就是所求点 A 经过



图 1-14

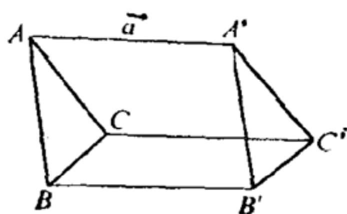


图 1-15

关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的象(图 1-14).

同理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$(图 1-15)，其中点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C' 分别是对应点，并且是一一对应的；线段 AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段；角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ACB$ 与 $\angle A'C'B'$、$\angle CBA$ 与 $\angle C'B'A'$ 分别是对应角. 可以证明:对应线段和对应角度是相等的,即有

$$AB=A'B'、\quad BC=B'C'、\quad CA=C'A',$$
$$\angle ABC=\angle A'B'C'、\quad \angle BCA=\angle B'C'A'、$$
$$\angle CAB=\angle C'A'B',$$

可见平移变换也是保长变换和保角变换.

一个图形 F，如果能找到一个向量 $\boldsymbol{a}$，使得经过关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的图形 F' 与 F 重合，即变换前后的图形重合，我们就称该图形为平移对称图形.

上述二方连图就是平移对称图形. 但是三角形、四边形、正多面体等有界限的图形都不能是平移对称图形. 平移对称图形一定是无界限的图形.

平移变换和反射、旋转、反演变换有相同之处，就是它们都是保长变换，又是保角变换，变换前后的图形都是全等图形. 但是平移对称图形还有自己的特点，它必须是无界图形，而反射、旋转、反演对称图形却可以是有界图形.

以上所述反射、旋转、反演、平移变换，可以统称为对称变换．一个图形经过对称变换能保持不变，即完成这种变换前后的图形重合，这种图形叫做对称图形．关于图形对称变换的性质，以及对称变换的多少的研究，称为对称性研究．这是一个重要的问题，以后将不断加以说明．

5．解　　例

在初等几何中，对图形上的某些元素进行对称变换，然后借各元素新旧位置关系，可以解决某些作图问题和几何极值问题，这种方法叫做对称变换法．由于所用对称变换的差别，它们可分为反射法、旋转法、中心对称法、平移法等．有时，解某个几何问题时，需要同时使用几种不同的对称变换，此时就称之为混合法．

反射法：此法所用的对称变换为反射变换．使用时，首先要注意寻出反射面，在平面图形时就是寻出反射轴，然后再注意寻找反射对称点．

[例 1]　A、B 为位于直线 l 同侧之两定点，试在定直线 l 上求一点 P，使得 $PA+PB$ 为最小．(图 1–16)

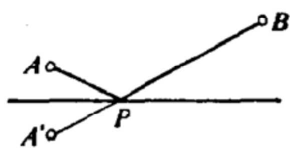


图　1–16

分析　假设 P 点已作出，这时很难发现点 P 的位置有什么特征，如果将点 A 以 l 为反射轴，作反射变换得对称点 A'．由于 $AP=A'P$，故欲使 $PA+PB$ 最小，只须 $PA'+PB$ 为最小即可．由此可知 P、A'、B 三点应该共线．

作法　1．以 l 为反射轴，作 A 点的对称点 A'

2．连结 BA'，与 l 交于 P 点．P 点就是所要求的点．

证明　因为点 A、A' 关于 l 对称，所以

$$PA=PA'$$

于是，　$PA+PB=PA'+PB.$　（等量代换）

因为 P、A'、B 三点共线，故在以 A'、B 为端点的折线中以 $PA'+PB$ 为最小．这也就证得了 $PA+PB$ 最小．

［例 2］ 过两定点 A、B，作切于定直线 l 的圆．（图 1-17）

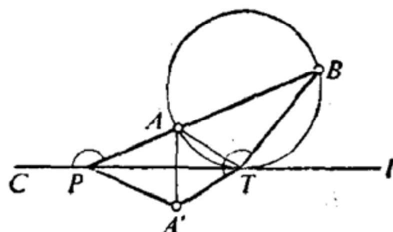


图 1-17

分析　假设图已作出，P 点是线段 AB 与 l 的交点，圆 ABT 过 A、B 点并与直线 l 相切于 T 点．可以看出，此作图题的关键是确定 T 点的位置，但此时 T 点没有显示什么特点．如果作 A 点关于 l 的反射对称点 A'，我们就能看到：

$$\angle ATP=\angle A'TP=\angle ABT,$$

$$\angle CPA=\angle ABT+\angle PTB$$

$$=\angle A'TP+\angle PTB=\angle A'TB.$$

因此，问题就转化为求作过 A'、B、T 这三点的圆，并使 $A'B$ 所含圆周角 $\angle A'TB$ 为定角 $\angle CPA$，这是可以解决的．

作法　1．以 l 为轴，作 A 的反射对称点 A'．

2．以 $A'B$ 为弦，作含 $\angle CPB$ 之弧，此弧与定直线 l 交于点 T．

3．作过 A、B、T 三点之圆，即为所求

证明　因为圆过 A、B、T 三点，所以由作图知

$$\angle CPA=\angle A'TB=\angle PTB+\angle A'TP.$$

因为 $\angle CPA$ 是 $\triangle PBT$ 的外角，所以

$$\angle CPA = \angle PTB + \angle PBT.$$

综上两式,即得

$$\angle PBT = \angle A'TP.$$

于是 $\angle PBT = \angle PTA$，这就证得了圆与 l 相切于 T.

讨论　因为以 $A'B$ 为弦,作含 $\angle CPB$ 之弧,在一般情况下与定直线 l 可以相交两点,所以在一般情况下,本问题可有两解.

旋转法：按此法作图所用的对称变换为旋转变换. 这里首先要注意的是寻得适当的旋转轴，在平面图形时，就是要寻找旋转中心，否则将无从施展本法. 当旋转中心确定后,再设法确定旋转角的大小和方向.

［例 3］　求作一正三角形，使它的三个顶点 A、B、C，分别落在三条已知平行直线 a、b、c 之上.（图 1-18）

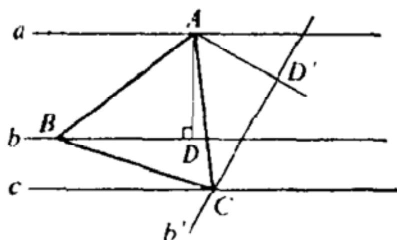


图　1-18

分析　假设正三角形已经做出,显然其中必有一顶点,例如 A 可以在 a 上任意选取,此后关键是要确定 C 点(或 B 点)的位置,但此时 C 点没有直接显示什么特点，故我们就想到，如果以 A 点为中心,把正三角形 $\triangle ABC$ 绕 A 点旋转 $60°$ 时，此时 B 点将转到 C 点的位置,同时直线 b 转到 b' 的位置,而 C 点恰为 b' 和 c 的交点，因此当 b' 确定时,C 点也就确定. 确定 b' 的位置是可以做到的，例如，如果我们作 AD 垂直 b,和 b 交于 D 点,则 D 点通过 $60°$ 旋转后将处在 D' 的位置,即 $\angle D'AD = 60°$, $AD' = AD$,作过 D' 点且与 AD' 垂直的直线就是 b'. 此时 C 点就容易确定了，它是直线 c 和直线 b' 的交点. 进而,由 A、C 就可确定 B 点.

作法　1. 在直线 a 上任选一点 A. 作 $AD\perp b$, 且与直线 b 交于 D 点.

2. 作 AD 旋转 $60°$ 后的象 AD'（即 $\angle D'AD=60°$, 且 $AD'=AD$).

3. 过 D' 作与 AD' 垂直的直线 b', 它与 c 交于 C 点. 连结 AC

4. 作 AB, 使 $\angle BAC=60°$, 与 b 交于 B 点. 连结 BC 此时 $\triangle ABC$ 即为所求.

证明　由作法,有

$$\angle DAD'=\angle BAC=60°.$$

这两个角中同减去 $\angle DAC$, 即有

$$\angle D'AC=\angle DAB. \qquad \text{（等量公理）}$$

$$\mathrm{rt}\triangle AD'C\cong\mathrm{rt}\triangle ADB.$$

$$AB=AC.$$

这就证得了 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,又因其顶角 $\angle BAC=60°$, 所以它是正三角形.

讨论　本题是不定位作图,它有解,而且适合条件的图形彼此是全等的，所以为一解. 第十四届国际中学生数学竞赛，由英国命题的第 6 题："给出四个不重合的互相平行的平面，试证：存在一个正四面体，它的四个顶点，分别在这四个平面上". 它是例 3 的推广，即由平面问题向空间问题的推广.

中心对称法：它利用反演变换作图. 利用中心对称法解题时，要注意奇数个反演的合成仍是反演，而偶数个反演的合成却是一个平移，甚至也可以是恒等变换.

[例 4]　已知各边中点的位置，求作五边形.（图 1-19)

假设　五点为 L、M、N、O、P.

求作　五边形 $ABCDE$, 使 L、M、N、O、P 依次分别

是 AB、BC、CD、DE、EA 五条边的中点.

分析 1. 要求 L、M、N、O、P 依次是未知五边形 $ABCDE$ 的边 AB、BC、CD、DE、EA 的中点，相当于求一点 A,接连以 L、M、N、O、P 作反演中心、施行五次反演变换后,使 A 仍然变回自身.

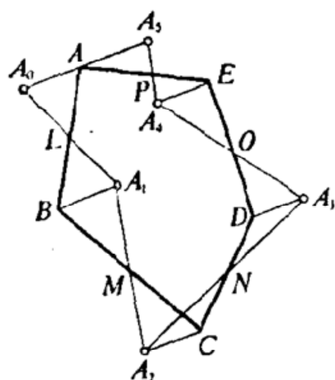


图 1-19

2. 我们知道五个反演的合成还是一个反演. 而在反演变换下，只有反演中心是不变点，故 A 点必定是这个反演变换的反演中心. 于是问题就转化成怎样去求这个反演中心的问题.

3. 寻求一个反演中心，只需求得任意一双对应点即可.因此,可以随便取一点 A_0，对它接连施行上述五个反演变换，结果将 A_0 变为 A_5; 此时连结 A_0A_5，取其中点，就是我们所要求的反演中心，它也就是 A 点. A 点既已作出，其它顶点 B、C、D、E 便可顺次作出.

作法 1. 任意取一点 A_0,作折线 $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$, 使 L、M、N、O、P 依次是 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5 的中点.

2. 取 A_0A_5 的中点为 A. 作折线 $ABCDE$,依次使 L、M、N、O、P依次是 AB、BC、CD、DE 的中点.

3. 连结 EA 五边形 $ABCDE$ 即为所求作的五边形.

证明 按作图知，L、M、N、O 已经依次是 AB、BC、CD、DE 的中点,故现在只需证 P 点是 EA 的中点即可.

$$A_0A \parallel A_1B \parallel A_2C \parallel A_3D \parallel A_4E$$

（反演变换的对应线段反向平行或共线），而 A_0A 和 AA_5 共线,即也有 $AA_5 \parallel A_4E$, 又因

$$A_0A=A_1B=A_2C=A_3D=A_4E$$

（对应线段），而 A 为 A_0A_5 的中点，即又有 $AA_5=A_0A$，所以

$$AA_5=A_4E.$$

从而，四边形 AA_4EA_5 是平行四边形，所以

$$\triangle AA_5P\cong\triangle A_4EP.$$

$$AP=EP,$$

即 P 为 AE 的中点。

平移法：此法所用的对称变换是平移。

［例 5］ 在 $\triangle ABC$ 中，作一条具有给定方向的线段，使其端点 X、Y 分别在两边 AB、AC 上，且使 $BX=CY$。（图 1-20）

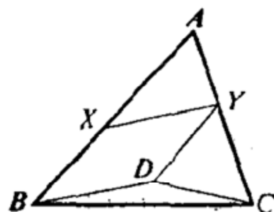


图 1-20

分析 若图已作出，XY 为一给定的方向，$BX=CY$。当 Y 点（或 X 点）确定时，问题就解决了。但由于 Y 点此时没有显示什么特点，为此我们想，如果将 XY 平移至 BD，那么连结 DY，显然有 $BX\parallel DY$。加之 $BX=DY$，所以 $DY=CY$。此时 $\triangle DCY$ 为等腰三角形，且 $\angle DYC=\angle A$。连结 DC，通过计算知道

$$\angle DCY=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$$

由此可见，D 点是具有给定的方向的线段 BD 和由 $\angle DCY=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$ 确定的直线 CD 的交点。

作法 1. 在 B 点作确定方向的射线 BD。

2. 过 C 点作 CD，使得 $\angle DCA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$。得 CD 与 BD 的交点 D。

3. 过点 D 作 $DY \parallel AB$, 且与 AC 交于 Y.

4. 过 Y 作 $XY \parallel BD$, 与 AB 交于 X. 此时，XY 就为所求的线段.

证 明 由 BD 的作法，直接知道 XY 具有给定的方向，以下只需证明 $BX = CY$.

$$\because \quad \angle YDC = 180° - \angle A - \angle DCY$$

$$= 180° - \angle A - \left(90° - \frac{1}{2}\angle A\right)$$

$$= 90° - \frac{1}{2}\angle A = \angle DCY, \qquad \text{（作法）}$$

所以 $\triangle DYC$ 为等腰三角形,即有

$$DY = CY.$$

由作法，$DA \parallel BX$ 且 $BD \parallel XY$，故四边形 $BDYX$ 为平行四边形,从而

$$BX = DY.$$

这就证明了

$$BX = CY.$$

混合法：作图时利用了多种对称变换.

[例 6] 在一灌溉总渠两岸有两个村庄，今需要在渠上架一垂直桥梁（设渠道两岸平行),并且使两个村庄到桥头的距离相等，问此桥应架在何处?(图 1-21)

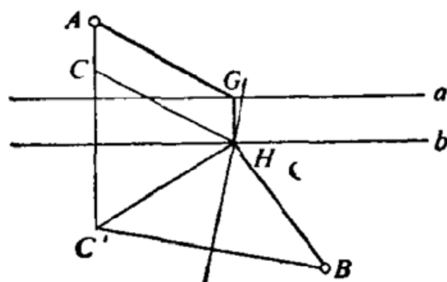


图 1-21

假设 平行线 a b 为渠道两岸，A、B 为两村庄所在处.

求作 HG, 使 $HG \perp a$ b, 且使 $AG = HB$.

分析　若图已作出，可以见到，关键是确定 H 点(或 G 点)的位置．但此时 H 点没有显示什么特点．如果我们过 A 作 a 的垂线，并在这垂线上截取 C 点，使 AC 等于渠道宽．这时，问题就转化为在直线 b 上找一 H，使得 H 到 B、C 点距离相等．如果再作 C 关于 b 的反射对称点 C'，必有 $C'H=HB$ 可见 H 必在线段 $C'B$ 的垂直平分线上．

作图　1．过 A 点作 a 的垂线，并在这垂线上截取

$$AC=\text{渠道宽}.$$

2．作 C 关于直线 b 的反射对称点 C'．

3．连结 BC'，作 BC' 的垂直平分线，与直线 b 交于 H．

4．过 H 作 b 的垂线，交直线 a 于 G 点，折线 $AGHB$ 即为所求．

证明　因为 H 在 BC' 的垂直平分线上，故有

$$HB=HC'.$$

又，C、C' 关于直线 b 对称，所以

$$HC'=CH.$$

而 CH 系由 AG 平移所得，所以

$$CH=AG.$$

$$\therefore HB=AG. \qquad \text{（等量传递）}$$

练　习　一

试用对称方法解下列各题:

1．设 A、B 是定直线 XY 同侧的两个定点，在 XY 上求一点 O，使得 $\angle AOX=2\angle BOY$．

2．已知定点 M、N，试在直线 l 上求一点 P，使得 $PM+PN$ 定长．

3．在定直线 XY 异侧有两个定点 A、B，试在 XY 上求一点 P，使得 PA 与 PB 之差为最大．

4. 设 D 为 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的一个定点，试在 AD 上求点 P，使得 $\angle BPD=\angle CPD$.

5. 在定底、定高的三角形中，周长最短的为等腰三角形.

6. 从两定圆外的一定点到两定圆，求作两条相等的线段，使得它们的夹角等于定角.

7. 求作一正三角形，使它的顶点分别落在三个已知的同心圆上.

8. 设 A、B 是定直线 l 同侧的两个定点，今有一定长线段 PQ 在 l 上滑动，试问这线段停在什么位置时，才使得折线 $APQB$ 之长最短？

9. 求作一圆，使切于已知角的一边于定点，而在他边上截下定长的弦.

10. 定圆外有两定点，求作一直径，使它的两端同两定点的两条连线相等.

11. 在 $\triangle ABC$ 内，求作一平行于 BC 且两端分别位于 AB、AC 两边的线段 EF，使得 $AE=CF$.

12. 在 $\triangle ABC$ 内引一直线 XY，与 AB、AC 分别交于 X、Y，使得 $XY=l$，$AX=CY$，其中 l 为定长.

13. 定圆中有两定弦 AB、CD，试在圆周上求一点 X，令 XA 与 XB 在 CD 上所截部分 EF 等于定长 l.

二、公式的对称

1. 对 称 多 项 式

我们知道，对于一元二次方程 $x^2+px+q=0$，假设它的两个根分别为 x_1 和 x_2，则有

$$x_1+x_2=-p,$$

$$x_1 \cdot x_2=q.$$

对于上述等式的左端的表达式

$$\begin{aligned} \sigma_1&=x_1+x_2, \\ \sigma_2&=x_1 \cdot x_2, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 x_1 和 x_2 的地位是平等的. 也就是说，例如在 σ_1 中，如把 x_1 换成 x_2，而把 x_2 换成 x_1，那么得到的式子是和原式相等的，即 $x_2+x_1=x_1+x_2$.

一般地，对于一元 n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$，假设它的 n 个根分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那么根据根与系数关系，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-a_1,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=a_2,$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n a_n.$$

完全同样地，对于上述等式的左端的表达式

$$\begin{aligned}&\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\&\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\&\vdots\\&\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n,\end{aligned}\tag{2}$$

其中 x_1、x_2、…、x_n 的地位是平等的。也就是说，在任一式中，如把 x_1 换成 x_{i_1}，把 x_2 换成 x_{i_2}，…，而把 x_n 换成 x_{i_n}（其中 i_1、i_2、…、i_n 是 1、2、…、n 的任一排列），那么得到的式子是和原式相等的．特别地，交换任意两个字母（例如 x_i 和 x_j），所得的式子和原式相等。

我们知道，由 (2) 式定义的 σ_1、σ_2、…、σ_n 都是关于 x_1、x_2、…、x_n 的 n 元多项式。根据这些多项式的上述性质，我们引进对称多项式的概念如下：在 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\not\equiv 0$ 中，如果对于任意的 i、j（其中 $1\leqslant i<j\leqslant n$），都有

$$\begin{aligned}&f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)\\&=f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n),\end{aligned}\tag{3}$$

则把这样的 n 元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 叫做 n 元对称多项式，或简单地叫做对称多项式．

根据上述定义，n 元对称多项式不只是由 (2) 式定义的 σ_1、σ_2、…、σ_n 这 n 个多项式．例如，三元多项式

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_1+x_3^2x_2,$$

读者可试加验证：对其任意调换两个字母，多项式是不变的．所以，这个多项式是一个三元对称多项式。

在 n 元对称多项式中，我们把 (2) 式定义的 σ_1、σ_2、…、σ_n 叫做 n 元初等对称多项式。

为什么要讨论对称多项式呢？这是因为对称多项式有许多重要的性质，例如：

1．两个对称多项式的和、差、积仍是对称多项式。

2．关于初等对称多项式 σ_1、σ_2、…、σ_n 的多项式，仍是关于 x_1、x_2、…、x_n 的对称多项式．

特别重要的，还有上述后一性质的逆命题，亦即：

对称多项式基本定理　任意一个 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，都可以表示为初等对称多项式 σ_1、σ_2、…、σ_n 的多项式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n). \tag{4}$$

为了证明上述定理，需要先介绍关于多元多项式的项的字典排列法，并引进首项的概念．

我们知道，尽管多元多项式也有次数的概念，但是它与一元多项式不一样，对它的项一般不适宜进行升幂排列或降幂排列．这就要引进一种新的排列方法——字典排列法．

每一单项式，它的各个字母的幂指数可组成一个 n 元有序非负整数组．因此，每一单项式都可对应一个 n 元有序非负整数组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$．对应是一一的．若两个单项式，它们对应的 n 元数组分别是：

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n), \qquad (l_1, l_2, \cdots, l_n),$$

那么，那一个排在前呢？按字典排列法，就是先比较第一个字母的幂指数 k_1、l_1，若有大小，就将大的排在前，例如若 $k_1>l_1$，就将 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 排在前面；若 $l_1=k_1$，那么再比较第二个字母的幂指数，若有大小，大的排在前，若相等则再比较第三个字母的幂指数，依此类推。精确地说，可以对 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$、$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ 的先后顺序作如下规定：如果数

$$k_1-l_1, \quad k_2-l_2, \quad \cdots, \quad k_n-l_n$$

中第一个不为零的数是正的，即 $i\leqslant n$ 使得

$$k_1-l_1=0, \quad \cdots, \quad k_{i-1}-l_{i-1}=0, \quad k_i-l_i>0,$$

那么，我们就称 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$先于 $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$．并记为

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) > (l_1, l_2, \cdots, l_n).$$

这样就可把一个多项式的各个项按字典排列法排出. 例如 $x_1x_2^2x_3^2+2x_1^2x_2+3x_1^3$, 按字典排列法可记成

$$3x_1^3+2x_1^2x_2+x_1x_2^2x_3^2.$$

同时,由定义立即可看出,对于任意两个 n 元数组,关系

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) > (l_1, l_2, \cdots, l_n),$$

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (l_1, l_2, \cdots, l_n),$$

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) < (l_1, l_2, \cdots, l_n)$$

中，有一个且仅有一个成立. 而且，关系"$>$"具有传递性，也就是说,如果

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) > (l_1, l_2, \cdots, l_n),$$

$$(l_1, l_2, \cdots, l_n) > (m_1, m_2, \cdots, m_n),$$

那么必有

$$(k_1, k_2, \cdots, k_n) > (m_1, m_2, \cdots, m_n).$$

这是因为, 由 $k_i-m_i=(k_i-l_i)+(l_i-m_i)$ 即可得出上面结论.

将多元多项式按字典排列后，第一个系数不为零的单项式，叫做这个多项式的首项. 注意，这里的首项，它的次数并不一定是最大的，这一点与一元多项式是不一样的.

现在证明：两个多元多项式 $f(x_1, x_2, \cdots x_n)\neq 0$、$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)\neq 0$ 的乘积 $f(x_1\cdots x_n)\cdot g(x_1\cdots x_n)$ 的首项，等于 $f(x_1 \cdots x_n)$的首项和 $g(x_1, \cdots x_n)$的首项之积.

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项为

$$ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}, \qquad \text{其中 } a\neq 0$$

$g(x_1, x_2, \cdots x_n)$的首项为

$$bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}. \qquad \text{其中 } b\neq 0$$

为了证明它们的积

$$abx_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}$$

为 fg 的首项，其实只需证明 n 元数组

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \cdots, p_n+q_n)$$

先于乘积中其他单项式的幂指数即可. 事实上，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中其他单项式的幂指数，只能是

$$(p_1+k_1, p_2+k_2, \cdots, p_n+k_n),$$

或

$$(l_1+q_1, l_2+q_2, \cdots, l_n+q_n),$$

或

$$(l_1+k_1, l_2+k_2, \cdots, l_n+k_n),$$

其中 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)>(l_1, l_2, \cdots, l_n)$, $(q_1, q_2, \cdots, q_n)>(k_1, k_2, \cdots, k_n)$, 而

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \cdots, p_n+q_n) \\ >(p_1+k_1, p_2+k_2, \cdots, p_n+k_n)$$

与

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \cdots, p_n+q_n) \\ >(l_1+q_1, l_2+q_2, \cdots, l_n+q_n)$$

是显然的. 同样,显然也有

$$(l_1+q_1, l_2+q_2, \cdots, l_n+q_n) \\ >(l_1+k_1, l_2+k_2, \cdots, l_n+k_n).$$

所以,由传递性,即可得

$$(p_1+q_1, p_2+q_2, \cdots, p_n+q_n) \\ >(l_1+k_1, l_2+k_2, \cdots, l_n+k_n).$$

这样,就证明了 $ab\,x_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}$ 不能与乘积中其它的项同类而相消，并且它先于所有其它的项，因而它是首项.

现在来给出对称多项式基本定理的证明.

证 明 设 n 元对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 按字典排列的首项为

$$ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n},\quad 其中\ a\neq 0. \tag{5}$$

作为首项,各字母的幂次应满足

$$l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n\geqslant 0.$$

(如果不然,可设对某个 i 有 $l_i<l_{i+1}$, 由于 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式,它必定在含有 (5) 式的同时,也含有单项式 $ax_1^{l_1}\cdots x_i^{l_{i+1}}x_{i+1}^{l_i}\cdots x_n^{l_n}$. 按字典排列,它必须先于 (5)式,这就与 (5)式是多项式首项的假设矛盾.)

构造一个对称多项式:

$$\varphi_1=a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}.$$

因为 σ_1、σ_2、$\cdots$、σ_n 的首项分别为 x_1, x_1x_2, $\cdots$, $x_1x_2\cdots x_n$, 因此上式展开后,首项为

$$ax_1^{l_1-l_2}(x_1x_2)^{l_2-l_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{l_n}=ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}.$$

这样,$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 φ_1 就有了相同的首项. 令 $f_1=f-\varphi_1$, 即

$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)-a\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}.$$

这时,因为 f 和 φ_1 有相同的首项,相减时可消去,因此相减后得到的多项式 $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$必定比 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 有较"小"的首项. 所谓较"小"的首项,是指: $f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项,按字典排列法,应排在 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的首项之后.

重复上述作法,并且不断继续下去,我们就能得到一系列的对称多项式:

$$f,\quad f_1=f-\varphi_1,\quad f_2=f_1-\varphi_2,\ \cdots,$$

其中 $\varphi_i\ (i=1, 2, \cdots)$ 是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式,它们的首项一个比一个来得"小". 由于给定的幂次一定是有限正整数,所以多项式 φ_i 的个数也是有限的. 我们不妨假设有 h 个 φ. 此时,由于

$$f_1=f-\varphi_1,$$
$$f_2=f_1-\varphi_2,$$
$$\vdots$$
$$f_{h-1}=f_{h-2}-\varphi_{h-1},$$
$$0=f_h=f_{h-1}-\varphi_h.$$
移项后相加，得 $0=f-\varphi_1-\varphi_2-\cdots-\varphi_h$，即
$$f=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_h.$$
这就是说，n 元多项式 f 可以表示成一些由 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 组成的单项式 φ_i（其中 $i=1,2,\cdots,h-1$）之和．换言之，任意的 n 元对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 确实可以表示成为一个由初等对称多项式组成的多项式．定理证毕．

其实，定理的证明过程，也告诉了我们一种具体的方法．

［例 1］ 把三元对称多项式 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 表示成 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式．

解 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 的首项为 x_1^3，它的幂次为 $(3,0,0)$．作
$$\varphi_1=\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3.$$
$$f_1=f-\varphi_1=x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3$$
$$=-3(x_1^2x_2+x_2^2x_1+\cdots)-6x_1x_2x_3.$$
进一步，f_1 的首项是 $-3x_1^2x_2$，它的幂次为 $(2,1,0)$．作
$$\varphi_2=-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=-3\sigma_1\sigma_2$$
$$=-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$=-3(x_1^2x_2+x_2^2x_1+\cdots)-9x_1x_2x_3.$$
因而
$$f_2=f_1-\varphi_2=x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2=3x_1x_2x_3=3\sigma_3.$$
于是
$$f=x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$
对于齐次的对称多项式，还可以用待定系数法来求解．由

定理的证明,我们看到 φ_i 完全由对称多项式 f、f_1、f_2、… 的首项决定，而且这些首项必定满足以下条件:

1. 每一 f_i 的首项都"小"于 f 的首项,并且，若 $i>j$, 那么 f_i 的首项"小"于 f_j 的首项.

2 每一首项的幂次的 n 元数组 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足不等式

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n.$$

3. 每一首项的次数都等于齐次多项式的次数.

综上所得,"小"于 f 的首项的一切可能的项的相应 n 元数组,可以按次列出，然后用待定系数法决定系数.

[例 2] 把齐次多项式 $f=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$ 化为用初等对称多项式表示的形式.

解 因为指数组只可能取表格左边的值

指	数		组	对应的初等对称多项式
2	2	0	0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=\sigma_2^2$
2	1	1	0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=\sigma_1\sigma_3$
1	1	1	0	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}=\sigma_4$

因此,多项式 f 总可以写成以下形式.

$$f=\sigma_2^2+A\sigma_1\sigma_3+B\sigma_4, \tag{6}$$

其中系数 A、B 待定.

分别设定 x_1、x_2、x_3、x_4 的值，并算出 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4 以及 f 的值,列表如下:

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	3	3	1	0	3
1	−1	1	−1	0	−2	0	1	6

将它们代入(6)式，就得相应的方程组

$$\begin{cases} 9+3A=3, \\ 4+B=6. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A=-2, \\ B=2. \end{cases}$$

所以齐次对称多项式 f 可表示成

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_4.$$

现在来考虑对称多项式理论在一元 n 次方程中的一个应用．对于

$$f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0,$$

它的 n 个根设为 α_1、α_2、$\cdots$、α_n. 这些根差积的平方为:

$$D=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

显然，D 是一个对称多项式（读者可直接按定义验证），并且，差积平方等于 0（即 $D=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2=0$）是 $f(x)$ 有重根的充分必要条件．因此，D 可以作为 $f(x)=0$ 是否有重根的判别式．

既然 D 是对称多项式，按基本定理，它应该可以表示成初等对称多项式 σ_1 σ_2, $\cdots$ σ_n 的多项式，根据根与系数的关系，D 当然可以表示为方程系数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 的多项式．这样，我们就可以通过方程的系数而求得 D, 从而判别 $f(x)=0$ 是否有重根．

［例 3］ 试求 $f(x)=x^2+a_1x+a_2=0$ 的重根判别式．

解　按初等代数的解法，易知它的判别式为 $a_1^2-4a_2$. 下面我们用对称多项式的理论来求解．

令 $f(x)$ 的两个根为 α_1、α_2, 所以

$$D=(\alpha_1-\alpha_2)^2=\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2.$$

根据根与系数的关系，

$$-a_1=\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2$$

$$a_2=\sigma_2=\alpha_1\alpha_2.$$

因为 D 的首项为 α_1^2, 可以令

$$\varphi_1=\sigma_1^{2-0}\sigma_2^0=\sigma_1^2=\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2,$$

$$f_1=D\quad \varphi_1=\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2-(\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)$$

$$=-4\alpha_1\alpha_2=-4\sigma_2,$$

$$\varphi_2=-4\sigma_2,$$

所以 $$D=\sigma_1^2-4\sigma_2^2=a_1^2-4a_2.$$

可见，与初等代数中的结果相同．虽然这里计算反较麻烦，但是它的优点在于能推广到高次方程．

［例 4］ 求方程 $f(x)=x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的重根判别式，

解 设方程 $f(x)=0$ 的根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$D=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2.$$

显然,其首项为 $\alpha_1^4\alpha_2^2$, 且 D 为齐次多项式，我们可以使用待定系数法．

指	数	组	对应的初等对称多项式
4	2	0	$\sigma_1^2\sigma_2^2 \quad =a_1^2a_2^2$
4	1	1	$\sigma_1^3\sigma_3 \quad =a_1^3a_3$
3	3	0	$\sigma_2^3 \quad =a_2^3$
3	2	1	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3=a_1a_2a_3$
2	2	2	$\sigma_3^2 \quad =a_3^2$

令相应的初等对称多项式的系数为 1、A、B、C、D, 就有

$$D=\sigma_1^2\sigma_2^2+A\sigma_1^3\sigma_3+B\sigma_2^3+C\sigma_1\sigma_2\sigma_3+D\sigma_3^2.$$

给定 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的 4 组值，就可定出系数 A、B、C、D 等．具体解法如下：先给 α_1、α_2、α_3 以 1、1、0 值，然后计算出 σ_1、

σ_2、σ_3、D 的值，再给 α_1、α_2、α_3 以另一组值等，具体见下表

α_1	α_2	α_3	σ_1	σ_2	σ_3	D
1	1	0	2	1	0	0
1	1	1	3	3	1	0
2	−1	1	2	−1	−2	36
1	−1	−1	−1	−1	1	0

代入上式，得方程组.

$$\begin{cases} B = -4, \\ 27A + 9C + D = 27, \\ 16A - 4C - 4D = -28, \\ A - C - D = 5. \end{cases}$$

解得: $A=-4$, $B=-4$, $C=18$, $D=-27$. 所以有

$$\begin{aligned} &(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2 \\ &=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2 \\ &=a_1^2a_2^2-4a_1^3a_3-4a_2^3+18a_1a_2a_3-27a_3^2. \end{aligned}$$

2. 解　　例

在初等代数中，常常会遇到一些与对称多项式有联系的问题. 如对称多项式的因式分解，求解由对称方程构成的方程组，等等. 这类问题，我们可统而称之为对称型的代数问题. 解答这些问题的方法变化较大，比较灵活. 因而，有时仅凭一些初等的方法，往往会感到无从下手，而应用上面的关于对称多项式的知识，情况就能大为改观.

为了求解对称型代数问题，我们对上面的对称多项式理论尚需作一些补充，推导出一些与应用更为直接有关的公式.

在解题时，我们常常要用到下面形状的对称多项式：

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k. \qquad (k=1, 2, 3 \cdots)$$

也就是关于字母 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 k 次幂的和式，这种多项式叫做等次幂的和．

我们先引进一个符号．现在有 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 是字母 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的幂的乘积（其中某些字母的幂可以为零）．今后我们用

$$C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$$

来表示由 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$，经字母的所有可能的置换所得的一切项的和．显然 $C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$ 是关于 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的对称多项式，并且每个项的次数也是相等的．

例如：

$$C(x_1) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$C(x_1x_2) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$C(3x_1^2) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + \cdots + 3x_n^2,$$

$$\begin{aligned} C(x_1^2x_2) = {} & x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots + x_1^2x_n \\ & + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + \cdots + x_2^2x_n \\ & + \cdots + x_n^2x_1 + x_n^2x_2 + \cdots + x_n^2x_{n-1}. \end{aligned}$$

我们还可以知道，每一个含有 n 个未知量的对称多项式，如果含有 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 这样的项，那么该对称多项式也必定含有 $C(ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n})$ 中的其它的项．

通过对称多项式基本定理，S_k 可以由初等对称多项式表出．但是，当 k 增大时，用前面介绍的方法去求出这些表达式极为烦琐、困难，因此需要另辟溪径．我们以下就是通过考察多项式 S_1, S_2, $\cdots$和 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n 之间的关系来解决问题．

首先，我们有

$$S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sigma_1.$$

其次,当 $k\leqslant n$ 时,因为

$$S_{k-1}=x_1^{k-1}+x_2^{k-1}+\cdots+x_n^{k-1},$$
$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

所以,通过计算归并,有

$$S_{k-1}\sigma_1=(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)+(x_1^{k-1}x_2+\cdots+x_n^{k-1}x_{n-1})$$
$$=S_k+C(x_1^{k-1}x_2).$$

可以逐一验证下列式子的正确性:

$$S_{k-1}\sigma_1=S_k+C(x_1^{k-1}x_2),$$
$$S_{k-2}\sigma_2=C(x_1^{k-1}x_2)+C(x_1^{k-2}x_2x_3),$$
$$\vdots$$
$$S_{k-i}\sigma_i=C(x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i)+C(x_1^{k-i}x_2\cdots x_{i+1}),$$
$$(\text{其中 } 2\leqslant i\leqslant k-2)$$
$$\vdots$$
$$S_1\sigma_{k-1}=C(x_1^2x_2\cdots x_{k-1})+k\sigma_k.$$

依次对上面各式乘上 $-1, 1, -1, 1, \cdots$, 全部相加后,再把各项移到一边,就得到下面的公式:

$$S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots(-1)^{k-1}S_1\sigma_{k-1}+(-1)^k k\sigma_k=0. \tag{7}$$

我们再来看,当 $k>n$ 时,用类似的计算,我们也可验证下列式子的正确性:

$$S_{k-1}\sigma_1=S_k+C(x_1^{k-1}x_2),$$
$$S_{k-2}\sigma_2=C(x_1^{k-1}x_2)+C(x_1^{k-2}x_2x_3),$$
$$\vdots$$
$$S_{k-i}\sigma_i=C(x_1^{k-i+1}x_2\cdots x_i)+C(x_1^{k-i}x_2\cdots x_ix_{i+1}),$$
$$(\text{其中 } 2\leqslant i\leqslant n-1)$$
$$\vdots$$
$$S_{k-n}\sigma_n=C(x_1^{k-n+1}x_2\cdots x_n).$$

同上,可得

$$S_k-S_{k-1}\sigma_1+S_{k-2}\sigma_2-\cdots(-1)^nS_{k-n}\sigma_n=0. \qquad (8)$$

公式(7)、(8)叫做牛顿公式．它们将等次幂和式与初等对称多项式联系了起来．通过计算，可以进一步写出用 σ_1, σ_2, $\cdots$, σ_n 所表示的 S_1 S_2 S_3, …的公式．当 $k\leqslant n$ 时,

$$S_1=\sigma_1;$$

因为 $S_2-S_1\sigma_1+2\sigma_2=0$, 所以

$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2;$$

因为 $S_3-S_2\sigma_1+S_1\sigma_2-3\sigma_3=0$, 所以

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

整理后，可以一并写出:

$$S_0=x_1^0+\cdots+x_n^0=n,$$

$$S_1=x_1+\cdots+x_n=\sigma_1,$$

$$S_2=x_1^2+\cdots+x_n^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

$$S_3=x_1^3+\cdots+x_n^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$

$$S_4=x_1^4+\cdots+x_n^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4,$$

$$S_5=x_1^5+\cdots+x_n^5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2 -5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5,$$

$$S_6=x_1^6+\cdots+x_n^6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_{33}+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4 -12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6.$$

这里特别要注意,上述关于 S_k 的公式,是在 $k\leqslant n$ 的条件之下写出的,当 $k>n$ 时，S_k 的表达式是不一样的例如，当 $n=3$ 时，S_1、S_2、S_3 的公式如上，而 S_4、S_5 S_6 …的公式就与上不一样:

$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2$$

$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

［例 5］ 解方程组 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=1. \end{cases}$

解 先将上列方程组改写成

$$\begin{cases} S_1=\sigma_1=1, \\ S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=3, \\ S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-3\sigma_2\sigma_3=1. \end{cases}$$

由计算，得：

$$\begin{cases} \sigma_1=1, \\ \sigma_2=-1, \\ \sigma_3=-1. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-1, \\ xyz=-1. \end{cases}$$

由表示根与系数关系的韦达定理，知 x、y、z 是下面方程的根：

$$u^3-u^2-u+1=0.$$

通过因式分解，解得

$$u=1,\ -1,\ 1.$$

所以，

$$\text{当 } x=-1 \text{ 时，}\quad y=1,\ z=1;$$

$$y=-1 \text{ 时，}\quad x=1,\ z=1;$$

$$z=-1 \text{ 时，}\quad x=1,\ y=1$$

这三组都是方程组的解.

［例 6］ 求方程组 $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^3+y^3+z^3=-18 \end{cases}$ 的整数解.

解　由题设知．

$$\sigma_1 = x+y+z=0,$$
$$S_3 = x^3+y^3+z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -18.$$

解得 $\sigma_3 = -6$，即

$$xyz = -6$$

可见 x、y、z 中必有负数．由于 $x+y+z=0$，x、y、z 不能全是负数，所以 x、y、z 中只能有一个为负数．再考虑到要求整数解，所以 $|x|$、$|y|$、$|z|$ 必为 -6 的因数，且 $S_3 = x^3+y^3+z^3 = -18$，所以该负数的绝对值为三数中最大．综上，方程组的整数解应为

若 $x=-3$ 则

$$\begin{cases} y=1,\ 2, \\ z=2,\ 1; \end{cases}$$

若 $y=-3$，则

$$\begin{cases} x=1,\ 2, \\ z=2,\ 1; \end{cases}$$

若 $z=-3$，则

$$\begin{cases} x=1,\ 2, \\ y=2,\ 1. \end{cases}$$

验证后可知，上面列出的六组解均为原方程组的整数解．

[例 7]　已知方程 $x^4-(3m+2)x^2+m^2=0$ 的四个实数根成等差数列，且 $m>0$，求 m 的值．

解　设

$$x_1 = a-3d,$$
$$x_2 = a-d,$$
$$x_3 = a+d,$$
$$x_4 = a+3d.$$

由根和系数的关系，得 $x_1+x_2+x_3+x_4=\sigma_1=0$ ，即

$$4a=0,$$

所以

$$a=0.$$

又 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_3x_4+x_4x_1=-10d^2=-(3m+2)$, 所以

$$d^2=\frac{3m+2}{10}.$$

再有 $x_1x_2x_3x_4=m^2$, 即

$$9d^4=m^2.$$

因为 $m>0$, 所以

$$3d^2=m.$$

再由上式，可得

$$\frac{3m+2}{10}=\frac{m}{3},$$

即

$$9m+6=10m.$$

所以

$$m=6$$

［例 8］ 设 $x+y+z=0$, 求 证：

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}.$$

证明 由题设,知

$$S_1=\sigma_1=x+y+z=0.$$

考 虑 到：

$$x^2+y^2+z^2=S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=-2\sigma_2,$$

所以

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=-\sigma_2.$$

而

$$x^3+y^3+z^3=S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=3\sigma_3,$$

所以

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\sigma_3.$$

再因为

$$\begin{aligned}x^5+y^5+z^5&=S_5\\&=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3\\&=-5\sigma_2\sigma_3,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=-\sigma_2\sigma_3.$$

联接上面两式,就有

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\cdot\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{x^5+y^5+z^5}{5}.$$

下面，我们再用它对多项式作因式分解.

[例 9] 分解 $f(x, y, z)=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$ 的因式.

解 考虑到 $(x^2+y^2+z^2)^2=x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$,就有

$$\begin{aligned}2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)&=(x^2+y^2+z^2)^2-(x^4+y^4+z^4)\\&=S_2^2-S_4\\&=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2\\&\qquad+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)\\&=2\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_3.\end{aligned}$$

因此,

$$f(x, y, z)=2\sigma_2^2-4\sigma_1\sigma_3-(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3)$$
$$=-\sigma_1^4+4\sigma_1^2\sigma_2-8\sigma_1\sigma_3$$
$$=\sigma_1(-\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2-8\sigma_3).$$

可见 $f(x, y, z)$ 能被 $\sigma_1=x+y+z$ 整除. 由于 $f(x, y, z)$ 是对称多项式，并且各项只含 x、y、z 的偶数幂，所以有 $f(x, y, z)=f(-x, y, z)=f(x, -y, z)=f(x, y, -z)$，即 $f(x, y, z)$ 也必定被 $-x+y+z$、$x-y+z$、$x+y-z$ 整除. 所以

$$f(x, y, z)=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)\times(x+y-z)Q(x, y, z),$$

其中 $Q(x, y, z)$ 为 x、y、z 的多项式. 考虑到 $f(x, y, z)$ 是四次齐次多项式，所以 $Q(x, y, z)$ 只能是零次多项式，于是令:

$$Q(x, y, z)=k \text{ （常数）},$$

且

$$x=y=z=1$$

时，可求得 $k=1$. 从而可知，原多项式可以分解为

$$f(x, y, z)=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4$$
$$=(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z).$$

练　　习二

1. 用初等对称多项式表示下列对称多项式:

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$.

(2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$.

(3) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$.

(4) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

2. 解方程组: $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=3. \end{cases}$

3．解方程组：$\begin{cases} x+y+z=11, \\ x^2+y^2+z^2=155, \\ yz=63. \end{cases}$

4 如果 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3=0$，则

$$\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{2}\cdot\frac{x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5}{5}=\frac{x_1^7+x_2^7+x_3^7+x_4^7+x_5^7}{7}.$$

5．设 a_1, a_2, a_3 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根，计算：$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2)$.

6．已知三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差级数，则 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$.

7．求一个四次方程，使 $S_1=S_2=S_3=0$.

8．设 a、b、c 为任意三角形的三边长，$\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$, 求证：$3\sigma_2\leqslant\sigma_1^2<4\sigma_2$.

三、群及其在晶体分类中的应用

1. 群 的 概 念

前面我们较为详细地讲述了图形的对称和公式的对称，同时也介绍了一些利用对称性质解题的方法。为了进一步了解对称，在量的方面对它作进一步的计算，我们将引进现代数学中的一个新概念——群．在普通的日常语言中，所谓“群”，乃群体也，它无非是指由若干个体组成的一个集体，并且具有某些共同的特征．数学中的“群”这个概念，尽管抽象一点，但和生活用语中“群”的概念又很相仿，它是具有某种结构的集合，它由某些数学研究的对象组成，并且具有某些性质。

我们先看几个例子：

［例 1］ 有个正三角形 $\triangle ABC$，试讨论它的所有对称变换具有的性质。

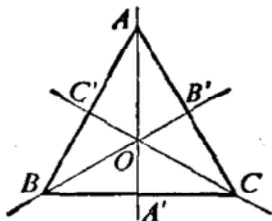


图 3-1

首先，让我们来找出它的对称变换．见图 3-1．连结 AA'，作过 AA' 且垂直 $\triangle ABC$ 所在平面的镜面 σ_A．将 $\triangle ABC$ 以 σ_A 作反射变换。显然，变换后的象仍然是一三角形，并且和原 $\triangle ABC$ 占据相同的空间位置，不过三角形的顶点的位置是变动过的．它们分别是：$A\to A$，$B\to C$，$C\to B$．

用类似的方法，作过 BB' 且垂直 $\triangle ABC$ 所在平面的镜面 σ_B．对 $\triangle ABC$ 作关于 σ_B 的反射变换，变换前后的图形也

会重合，而顶点的位置也变动了．它们分别是：$A \to C$, $B \to B$, $C \to A$. 完全相仿地，可以作镜面 σ_C，当对 $\triangle ABC$ 作关于 σ_C 的反射变换后，图形不变，但顶点位置改变了．它们是：$A \to B$, $B \to A$, $C \to C$.

此外，我们还可以找出正三角形 ABC 的另外一些对称变换．我们知道，平面 σ_A, σ_B, σ_C 相交于直线 L, L 垂直于 $\triangle ABC$ 所在平面，并且交于 AA', BB', CC' 的交点 O. 如果以 L 为旋转轴，又可以得三个旋转变换：C_3^0, C_3^1, C_3^2，分别对应的旋转角度为 $360°$, $120°$, $240°$，它们也都是 $\triangle ABC$ 的对称变换．也就是说，当对 $\triangle ABC$ 作 C_3^0，或 C_3^1，或 C_3^2 旋转变换时，变换前后的图形重合．不过顶点的位置是变动过的，具体地说，它们分别是：C_3^0: $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$; C_3^1: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$; C_3^2 $A \to C$, $B \to A$, $C \to B$. 至此，我们已找到关于 $\triangle ABC$ 六个不同的对称变换，这些变换组成集合 $G = \{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, C_3^0, C_3^1, C_3^2\}$. 下面我们来讨论集合 G 的性质．

首先让我们来介绍变换乘法的概念．如果对图形作变换 A 之后，相继再作变换 B，其结果和对图形作一次变换 C 相同，那么我们就称该变换 C 为两次相继变换 A 和 B 的乘积，并且记作：$BA = C$.

我们在例 1 中说到的变换集 G 的变换，就有相乘的关系．例如：$C_3^1 \sigma_A = \sigma_C$. 这是因为

$$\sigma_A: \ A \to A, \ B \to C, \ C \to B,$$

$$C_3^1 \ \ A \to B, \ B \to C, \ C \to A,$$

所以 $$C_3^1 \sigma_A: \ A \to B, \ B \to A, \ C \to C,$$

而 σ_C 也有同样的对应关系：

$$\sigma_C: \ A \to B, \ B \to A, \ C \to C.$$

为了全面地考察这些变换之间的关系，我们可以详细地把六

个变换相应的乘积列成表格：

	C_3^0	C_3^1	C_3^2	σ_A	σ_B	σ_C
C_3^0	C_3^0	C_3^1	C_3^2	σ_A	σ_B	σ_C
C_3^1	C_3^1	C_3^2	C_3^0	σ_C	σ_A	σ_B
C_3^2	C_3^2	C_3^0	C_3^1	σ_B	σ_C	σ_A
σ_A	σ_A	σ_B	σ_C	C_3^0	C_3^1	C_3^2
σ_B	σ_B	σ_C	σ_A	C_3^2	C_3^0	C_3^1
σ_C	σ_C	σ_A	σ_B	C_3^1	C_3^2	C_3^0

从表中直接看出，G 中任意两个变换的乘积仍然是 G 中的变换，这称为集合 G 关于乘法是封闭的．我们还可从表中看到，这些变换关于乘法具有下面三个性质：

1° 结合律．任意三个变换相乘的结果，与相乘的次序无关．例如：$(C_3^1\sigma_A)\sigma_B=C_3^1(\sigma_A\sigma_B)=C_3^2$．

2° G 中有恒等变换 C_3^0，任何变换和它相乘后不变．例如：$C_3^0C_3^2=C_3^2C_3^0=C_3^2$．

3° G 中每个变换都有逆变换，即对 G 中任何变换，都存在某一变换（也是 G 中的），使得两者的乘积为恒等变换．C_3^0，C_3^1，C_3^2，σ_A，σ_B，σ_C 的逆变换分别是 C_3^0，C_3^2，C_3^1，σ_A，σ_B，σ_C．例如：$C_3^1C_3^2=C_3^0$，$\sigma_A\sigma_A=C_3^0$．

下面我们将讲述另一个例子，为此我们需要引进一个新的概念，它就是置换．所谓置换，是指对 n 个元素所组成的集合，实施这样的一个替换：使得集合中每一元素由集合中某一元素替代，而且不同的元素要被不同的元素替代．

例如，我们取三个元素组成的集合，元素分别用 1, 2, 3 表示；当以元素 1, 3, 2 分别替代 1, 2, 3 时，我们就对集合实施了一次置换，用符号 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ 表示这个置换，并记作 E_3；

当以 2, 3, 1 替代 1, 2, 3 时，我们就得到置换 $E_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.
这样的置换一共有六个,除上述 E_1、E_3 外,还有

$$E_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$E_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

通过计算，我们还可以见到：对三个元素的集合相继实施两次置换的结果，可以与某一个置换相同，我们称后者是前两置换的乘积. 例如

$$E_3E_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=E_4.$$

注意. 这里的运算次序不能搞反了：等号左边的两个置换中，右边的$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$先发生作用，左边的$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$后发生作用. 以下我们可以讨论由置换组成的集合关于置换的乘法的性质.

[例 2] 由六个置换:

$$E_0=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad E_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},$$

$$E_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad E_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

组成的集 S_3. 按置换的乘法可以制成表格如下:

	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_0	E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
E_1	E_1	E_2	E_0	E_4	E_5	E_3
E_2	E_2	E_0	E_1	E_5	E_3	E_4
E_3	E_3	E_4	E_5	E_0	E_1	E_2
E_4	E_4	E_5	E_3	E_1	E_2	E_0
E_5	E_5	E_3	E_4	E_2	E_0	E_1

从表上也可直接看出，置换集合 S_3 关于置换的乘法是封闭的．也就是说，S_3 中任意两个置换的乘积仍然是 S_3 中的一个置换．例如：$E_4E_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=E_1$．并且，还可以看到置换关于乘法还有下面三个性质：

1°．结合律成立．任意三个置换的乘积的结果与相乘的次序无关．例如：$E_1(E_2E_3)=(E_1E_2)E_3$．

2°．有单位置换（恒等置换）E_0．任何置换和它相乘保持不变．例如：$E_0E_3=E_3E_0=E_3$．

3°．S_3 中每一置换都有逆置换，即对 S_3 中任何置换，都存在 S_3 中某一置换，使得两者的乘积为恒等置换．例如 E_1 的逆置换是 E_2，即 $E_2E_1=E_0$．从表上可以看出，E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 的逆置换分别是：E_0, E_2, E_1, E_3 E_5, E_4．

从例 1 和例 2 中可以看到一些共同点．首先，研究的对象都是某些元素组成的集合．例 1 是指某些对称变换的集合；例 2 是某些置换的集合．其次，在它们的元素之间都可以实施某种运算．例 1 指的是能实施变换的乘法运算；例 2 指的是能实施置换的乘法运算．另外，它们对乘法运算都具有某些性质　满足结合律;有单位元(恒等变换或恒等置换);有逆

元（逆变换或逆置换）．至此，我们可以概括出群的概念．

如果集合 G 中能实施一种运算"∘"(也就是说，G 中的元素关于运算"∘"是封闭的)，并且满足条件：

G_1^0 集合 G 中的元素关于乘法运算"∘"满足结合律．即集合 G 中任意三个元素实施乘法的结果与次序无关．用符号表示可以写成：对任意元素 a、b、$c\in G$，则有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c).$$

G_2^0、G 中有单位元 e，即对于任意 $a\in G$，都有

$$(a\circ e)=(e\circ a)=a.$$

G_3^0. G 中任一元 a 都有逆元，即 $a\in G$，总存在一元素 $a^{-1}\in G$，使得

$$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e.$$

这时，我们称集合 G 是一个群．

根据这个定义，我们可以知道，例 1 是变换群，例 2 是一置换群．

我们也可以容易地判定以下集合成群．

［例3］ 全体整数集合 $\mathbf{Z}=\{\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ 关于普通的加法运算成群.

首先我们可以看到，任意两个整数的和仍为整数，即整数集关于加法是封闭的．其次可以看出整数集关于加法满足三条件：

1 对任意的 a、b、$c\in\mathbf{Z}$，显然有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

2°. 存在着 0，对任意整数 $a\in\mathbf{Z}$ 而言，总有

$$a+0=0+a=a.$$

其中 0 就是单位元．

3．对任意整数 $a\in\mathbf{Z}$，总存在 $-a\in\mathbf{Z}$，有

$$a+(-a)=(-a)+a=0,$$

其中 $-a$ 就是 a 的逆元.

注意. 群的定义中的"运算",是具体的运算的概括和抽象,它可以指我们熟悉的数的加法,乘法运算,同时也可指一些为我们所不熟悉的运算,如变换、置换、以至其它的运算.

[例 4] 只含数 0 的集合,对数的加法成群.

[例 5] 只含数 1 的集合,对数的乘法成群.

[例 6] 只含数 1 和 -1 的集合,对数的乘法成群.

上述六例中,例 1、例 2、例 4、例 5、例 6 中所说的群,由于它们的元素的个数都是有限的,所以称之为有限群;而例 3 中所说的群,因为群元素个数无限,所以称为无限群.

定义:群 G 的非空子集 H 也构成群时,H 称为 G 的子群.

[例 7] 设 n 为一整数,在整数加法群 $\mathbf{Z}$ 中,所有 n 的倍数,对加法运算也成群. 因为两个 n 的倍数的和显然也是 n 的倍数,即对加法是封闭的;结合律、单位元、逆元的条件也是满足的. 因而,它也是 $\mathbf{Z}$ 的子群,我们把它记作 $n\mathbf{Z}$.

[例 8] 有群 G, 只由单位元 e 组成的集合 $\{e\}$显然是群 G 的一个子群,群 G 本身也是 G 的子群. 这两个子群,所有的群都具备,我们把它们称为平凡的,其它类型的子群称为非平凡的子群.

[例 9] 令 $C_6=\{C_6^0, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5\}$为六次旋转轴 L 的六个旋转组成的集合,它们的旋转角分别为 $360°$, $60°$, $120°$, $180°$, $240°$, $300°$ 等,它们构成六阶群.

现在我们来看集合 $C_3=\{C_6^0, C_6^2, C_6^4\}$, 其中元素为绕 L 轴旋转角分别为 $360°$, $120°$, $240°$ 的三个旋转;显然它们也是一个群,并且由于 C_3 是 C_6 的子集, 所以 C_3 是 C_6 的子群.

同样地，我们还可以验证 $C_2=\{C_6^0, C_6^3\}$ 也是 C_6 的子群. C_2 关于变换的乘积成群是显然的，因此它是 C_6 的子群.

［例 10］ 令 $C_{2n}, C_n, \cdots, C_2$ 分别代表阶数为 $2n, n, \cdots, 2$ 的旋转群，可以验证它们关于变换的乘法是成群的，而 $C_n, \cdots, C_2$ 为 C_{2n} 的非平凡子群.

为了确定群 G 的子集 H 是否成群，似乎需要考察 H 对运算的封闭性以及是否满足成群的三条件，其实问题可以简化,无需验证全部条件. 下述定理就保证了这一点.

定 理 群 G 的非空子集 H 是一个子群的充分必要条件是：对任意的元 a、$b\in H$,总可推得 $ab^{-1}\in H$.

证明 必要性是显然的，因为如果 H 是子群，且 a、$b\in H$,当然 b 的逆元 $b^{-1}\in H$,所以乘积 $ab^{-1}\in H$.

充分性. 因为 H 非空,所以可设 $a\in H$,于是 a、$a\in H\subseteq G$,从而有 $aa^{-1}\in H$,即

$$e\in H.$$

这样，H 中就有了恒等元 e. 此外,由 e、$a\in H$ 可知

$$a^{-1}=ea^{-1}\in H,$$

即 H 也含有 a 的逆元. 同理,由于 e $b\in H$, 也有

$$b^{-1}=eb^{-1}\in H.$$

这样可知,由 a、$b\in H$ 可得 a、$b^{-1}\in H$,从而就有

$$ab=a(b^{-1})^{-1}\in H.$$

这就是说，H 对乘法来说是封闭的. 至于结合律是自然满足的,因为 H 的元素都是群 G 的元素. 至此,我们证明了 H 是群 G 的子群. 定理证毕,

一个群，究竟有多少子群，以及子群的构造如何，这是群论所要研究的主要问题之一，至今尚未获得全部解决. 对有

些类型的群来说，子群的确定问题解决得较好．例如对有限阶群就有较好的结果:有限群 G 的子群的阶数一定是群 G 的阶数的因子(这是法国著名数学家拉格朗日获得的成果,称为拉格朗日定理)．它揭示了有限群 G 的子群的可能阶数．例如,如果群 G 为 15 阶，那么它的子群的阶数只可能是 1, 3, 5, 15．这样，素数阶数的群就不可能有非平凡子群．

群和对称有什么联系呢？

有某一几何图形 F, 假如我们已经找到了它的全部对称变换，那么对称变换的全体就构成了一个集合，我们把它叫做完全集合．显然，在一个完全集合中，任意两个变换的乘积仍然是完全集合中的一个变换，这就是说，完全集合关于变换的乘法是封闭的；我们还可以验证它满足成群三条件如下：

首先，完全集合中的元素都是图形 F 的对称变换,而关于变换的乘法是满足结合律的．

其次，因为完全集合包含关于图形 F 的一切对称变换，当然它也必定包含使图形 F 恒定不变的恒等变换 E,这就表明完全集合包含单位元．

第三，完全集合中任一变换都有逆变换也是明显的．因为既然有对称变换 τ: $F\to F'$,使得 F 和 F' 重合．那么使 $F'\to F$ 的变换 τ^{-1}，必定也是对称变换，所以 τ^{-1} 也必定属于图形 F 的完全集合．

综上，我们就证得了完全集合构成群．这个群称为图形 F 的完全对称性群．

进而，我们还可以看到，图形的对称性和它的完全对称性群是密切相关的．凡对称图形，总存在若干个非恒等对称变换，这些变换的全体和恒等变换一起构成该图形的完全对称性群．反之，如果一个图形，存在着一个关于它的非平凡的对

称变换,那么该图形就是对称图形．不是对称的图形,就不能找到非恒等的对称变换．我们还可看到，图形的对称程度愈高,关于图形的对称变换就愈多,也就是说它的完全对称性群的元素愈多,群的阶数愈高．由此可见，图形的对称程度的高低是与对称性群的阶数密切相关的．这样，就启发人们用群去刻划对称图形及其性质，用群的理论去研究对称，所以人们就把群论说成是研究对称的数学理论．

2. 晶体分类中的群论方法

晶体，希腊文为"κρνζταλλσ"，即冰的意思．一般是指未经人工磨削而具有规则几何多面体外形的固体．它色彩鲜艳，闪闪发光，直到十九世纪还只是用来装饰，后来被广泛地用于工业上，例如制造钻头、镜片，特别近年来在电子技术中得到了重要的应用．可以说,今天在国民经济各生产部门,几乎已找不到不使用晶体的了．

大家知道，物质的性质是和结构有关的，即和它的分子组成成分和排列次序有关．同样，晶体的性质也和结构有关．1912年以来，化学家用X射线分析、实测了5000多种晶体，发现凡晶体都是由微粒（原子、分子或离子）有规则的重复排列而组成的．晶体中微粒的排列，按照一定的方式不断地作周期性的重复，这就是晶体构造的周期性．晶体中,周期性排列着的微粒组成的框架,称为晶格．微粒重心的位置,称为晶格的结点,这些结点的总体,称为点阵．

例如,图3-2是食盐NaCl晶体的构造．大球代表氯Cl,小球代表钠Na．图3-2表示由Cl和Na堆砌而成的小立方体，它是从食盐晶体中截割取出的极小部分．在1[毫米]^{3}的

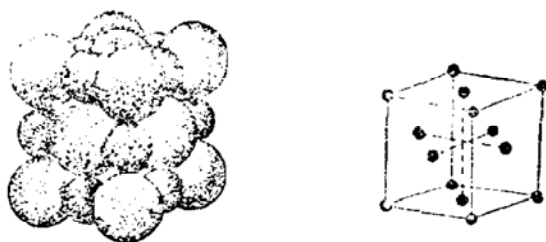


图 3-2

NaCl 晶体中,大约有 $10^{18}\sim10^{19}$ 这样多的此类小立方体. 如果按立方体的棱看一下，总是 Cl 和 Na 相间地排列着,而且两个 Cl(或 Na) 的重心之间的最小距离也总是 5.628 Å(1 Å $=10^{-8}$ 厘米)，食盐晶体的构造就是由这些小单元向四方延伸而成的.

其实，一切晶体都有类似的构造，它们可以看作是由结点沿空间三个不同方向，各按一定的距离周期性地平移而构成的. 可以这样想象,如果我们到晶体世界内部去“旅游”,并且始终沿笔直方向前进，那么我们在不同的地区，将会发现“风景”只会改变有限次,然后,一切又从头开始,连次序也跟前面一次相同.

由于晶格的周期性，我们可以在其中选取一定的单元，只要将它不断重复地平移，就可以得出整个晶格. 平移可以在三个方向进行. 如果令 a_1、a_2、a_3(它们一般不相等)是代表晶格单元的三个棱边之长和取向的向量，我们把它们称为平移向量，这样的单元称为晶胞. 晶胞和平移向量可以有不同的选取，而结果都给出完全一样的晶格. 体积最小的晶胞称为元胞. 构成元胞的三个平移向量叫做基本平移向量. 至此我们可以见到它们有以下特点:

首先，晶体是由晶胞组成的，将晶胞平行地堆积在一起，可以充满整个晶体，这里，我们很容易想象到晶胞的形状并

非任意的，否则就不能填满晶体．譬如正四面体、六面体、正六棱柱体等就可以填满空间，而正十二面体、正二十面体就不能，这就是后面我们要说的晶体制约．

另外，晶格、点阵具有对称性．它既可以是某些平移变换的对称图形，即在某些平移变换下（例如，进行平移 α_1, 或 α_2, 或 α_3, 或它们的组合等）图形不变；也可以是某些旋转、反射、反演变换的对称图形，也就是说，在某些旋转、反射、反演变换前后的晶格是重合的，在这些变换前后的点阵是重合的．这就为我们用晶格的对称性对晶体进行分类提供了根据．

对晶体进行分类，有助于认识晶体性能，是有重要意义的．分类可以按两种方式进行：一种是直观的分类，即通过观察比较各种晶体的多种性质的异同，加以归纳分类，这样的分类，工作繁重，而且对尚未发现的晶体就无从述说，当然也无法将之分类；另一种分类是理论上的分类，尽管它也有不足之处，但因分类比较完备，对直观的分类能起到补偿作用．

所谓对晶体作理论的分类，就是利用数学概念“群”，按晶体点阵的对称程度进行分类．因为点阵的对称程度完全可以由所对应的完全对称性群决定，因此晶体的分类就被归结为它对应的完全对称性群的分类．

前面说过，点阵有两种对称性：关于平移变换的对称性和关于旋转、反射、反演变换的对称性．先考察关于旋转、反射、反演变换的对称性．容易想象，不管是旋转变换，还是反射或反演变换下的对称图形，它们在那些变换作用前后，除整个图形重合外，确实还至少存在有空间一点，在变换前后不变．如在旋转变换下，旋转轴上的每一点都不变；如在反射变换下，反射面上的每一点都不变；如在反演变换下，反演中心这点不变，而平移变换就不具有这种性质，它不能保证至少有

一点不变. 问题是,如果有一图形是旋转、反射、反演等多种变换下的对称图形,那么,对这些变换来说,是否存在共同的不变点呢?在一定条件下,回答是肯定的.

具有共同不变点的变换组成的群,称为点群. 由上面的分析可知,点群只能包含旋转、反射和反演等变换,而不能包含平移变换. 点群有两类:只含有旋转变换的点群称为第一类点群,也叫做旋转点群;除旋转变换外,还含有反演、反射以及它们的合成变换的点群叫做第二类点群.

晶体的分类,可以归结为对它的对称性群的分类. 由于在宏观观察时,晶体是一个有限图形,所以它不可能关于平移变换不变,只可能关于旋转、反射、反演变换不变. 于是,就宏观而言,晶体的对称性群是点群,而且是有限阶点群. 这样,晶体的分类又归结为点群的分类. 点群的分类在很大程度上依赖于第一类点群的分类. 因为一旦给出了所有的第一类点群,就可按一定的步骤构造出第二类点群. 以下着重讨论第一类点群的分类问题.

我们知道,两个旋转的乘积不一定仍是一个旋转. 例如,当两个旋转的轴平行,旋转角大小相等、且方向相反时,它们的乘积却是一个平移. 但是,当两个旋转的轴相交时,它们的乘积则仍是一个旋转,且旋转轴仍过这一交点. 所以,三维空间中,所有以过一点 θ 之直线为轴的旋转之集合构成关于点 θ 的旋转点群,记作 R_θ. 显然,群 R_θ 是无限的. 那么,R_θ 含有多少有限子群呢?它们又如何分类呢?这就是下面要回答的.

令 G 是群 R_θ 的一个有限子群,其阶 $n=n(G)$. 现在,以点 θ 为中心,作一个半径为 1 的单位球 S_r. 于是,G 中每一非恒等旋转 g 的轴与球面 S_r 相交两点,这两点在旋转 g 作用

下显然是不变点，它们称为旋转 g 的极点．点群 G 的恒等元 e 使球面 S_r 上每一点都不变，我们约定它没有极点．当然，对 G 的不同旋转，极点可以是不同的．由于 n 阶群 G 含有 $n-1$ 个非恒等旋转，每个非恒等旋转都有 2 个极点，故 G 共有 $2(n-1)$ 个极点(重合的极点按重数计数)，它们所成的集合记为 S.

任取 $x\in S$，也就是说，x 是 G 中某个非恒等旋转 g_1 的极点，即 $g_1x=x$．设 g_2 是 G 中任意一个非恒等旋转，由于 $(g_2g_1g_2^{-1})g_2x=g_2g_1x=g_2x$，所以，$g_2x$ 是 G 中非恒等旋转 $g_2g_1g_2^{-1}$ 的极点(注意，如果 $g_2g_1g_2^{-1}$ 是恒等元，即 $g_2g_1g_2^{-1}=e$，则 $g_1=g_2^{-1}eg_2=e$，此为不可能)．这表明，极点集合 S 中任一点 x 经 G 中任一旋转（包括恒等元）作用后仍然变为集合 S 中的极点．于是，群 G 的每个旋转都可以看成是有限集合 S 上的置换．

现在假设 x 和 y 是 S 中两个点，如果 G 中有一个旋转 g，使得在 g 的作用下，点 x 变为 y，即 $y=gx$，那么就说点 x 和 y 是共轭的．把集合 S 中相互共轭的极点归为一类，相互不共轭的极点归在不同的类，于是，S 就分成为若干个共轭极点类．极点 x 所在的共轭类称为极点 x 在点群 G 作用下的轨道，记作 x^G．容易看出，$x^G=\{gx: g\in G\}$.

仍令 x 是 G 的某个旋转的极点，显然 G 中所有使极点 x 不变的旋转变换构成 G 的子群，记作 G_x，它称为点群 G 的使极点 x 不变的稳定子群．容易看出，$G_x=\{g\in G: gx=x\}$.

关于点群 G 的阶数 n，极点 x 的稳定子群 G_x 的阶数 m，以及极点 x 所在的轨道 x^G 的长 p(即轨道 x^G 所含极点的数目)，由拉格朗日定理，有 $n=mp$.

假设 G 有 k 个轨道，且设 x_i 是 G 的第 i 轨道的一个极

点，i 轨道 x 的长为 p_i，x_i 的稳定子群 G_{x_i} 的阶数为 n_i，则 $n=n_ip_i$，其中 $i=1, 2, \cdots, k$. 注意，对于任意 $x\in x_i^G$，它的稳定子群 G_x 的阶数 $n(G_x)$ 也满足 $n=n(G_x)p_i=n_ip_i$，所以，$n(G_x)=n_i$. 因此，使 i 轨道的某个极点不变的全部非恒等旋转的数目就是 $p_i(n_i-1)=n-p_i$. 再对 k 个轨道求和，就得到使某个极点不变的非恒等旋转的总数 $kn-\sum\limits_{i=1} p_i$. 由于每个旋转都有两个极点，所以，如此算得的非恒等旋转总数应是 G 中非恒等旋转的总数的两倍，即得到关系式

$$2(n-1)=kn-\sum_{i=1}^{k} p_i. \tag{1}$$

显然，G 的 i 轨道至少应含有一个极点，即 $p_i\geqslant 1$. 由式(1)得，

$$2(n-1)=kn-\sum_{i=1}^{k} p_i\leqslant kn-k=k(n-1).$$

因此，$k\geqslant 2$. 另一方面，子群 G_{x_i} 至少含有一个非恒等旋转，否则 i 轨道将不含任何极点. 因此，$n_i=\frac{n}{p_i}\geqslant 2$，即 $p_i\leqslant\frac{n}{2}$.
由式(1 得，

$$2(n-1)=kn-\sum_{i=1}^{k} p_i\geqslant kn-k\cdot\frac{n}{2}=k\cdot\frac{n}{2},$$

所以，$k\leqslant 4-\frac{4}{n}<4$. 于是，$k$ 只能是 2 或 3.

当 $k=2$ 时，由式(1) 得 $p_1+p_2=2$. 因此，$p_1=p_2=1$，从而 $n_1=n_2=n$. 这表明，如果有限子群 G 只有两个轨道，那么 G 只有两个极点，因此，G 中所有非恒等旋转的轴都是重合的. 容易看出，旋转角为 $2\pi/n$ 的绕固定轴的旋转所生成的 n 阶旋转群 C_n 就满足条件，$n=2, 3, \cdots$.

当 $k=3$ 时，式 (1) 化为 $n+2=p_1+p_2+p_3$. 因 $p_i=\frac{n}{n_i}$, 故

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1+\frac{2}{n}. \qquad (2)$$

无妨设 $n_1\leqslant n_2\leqslant n_3$. 因此 $\frac{3}{n_1}\geqslant 1+\frac{2}{n}>1$, 故 $n_1<3$. 注意 $n_1>1$, 故 $n_1=2$. 而且式 (2)化为

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}+\frac{2}{n}.$$

由于 $n_2\leqslant n_3$, 所以, $\frac{2}{n_2}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{n}>\frac{1}{2}$. 由此得到 $n_2<4$. 所以，n_2 或为 2 或为 3

如果 $n_2=2$, 则由式 (2) 得到 $n_3=\frac{\quad}{2}$. 此时，n 应为偶数;

如果 $n_2=3$, 则由式 (2) 得到 $\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{n}<\frac{1}{6}$ 即 $n_3<6$. 因此，n_3 为 3, 4 或 5. 所以，可能的解为

$$n_1=2,\quad n_2=n_3=3,\qquad n=12,$$
$$n_1=2,\quad n_2=3,\ n_3=4,\quad n=24,$$
$$n_1=2,\quad n_2=3,\ n_3=5,\quad n=60.$$

至此证明了一个很重要的结论：凡以空间中过点 θ 的直线为旋转轴的有限旋转群，只能是下表中列举的五种. 即第一类点群只有这五种，分别用 C_n, D_m, T, O, Y 表示.

	n	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3
I	n	n	n		1	1	
II	n(偶数)	2	2	$n/2$	$n/2$	$n/2$	2
III	12	2	3	3	6	4	4
IV	24	2	3	4	12	8	6
V	60	2	3	5	30	20	12

注意．当一般地讨论旋转群的一切子群时，n 可以取任意自然数．因此,它们的个数可以是无限的．如以绕固定轴的旋转群 C_n 为例,群元就是无限的．这样的点群还不能直接与晶体相对应．为了使得能和晶体及其分类相似，我们还必须从中区分出与晶体相应的群．区分点群是否能成为晶体的对称性群的条件，称为晶体制约．

定义　如果对称性群 G 能够使空间某点 θ 保持不变,并且能使以 θ 为结点的晶格不变,那么 G 称为晶体点群．

前面的条件使 G 成为点群，后面的条件是与晶体的格子的对称性有关的条件．两者缺一都不能构成晶体点群．我们把后者称为晶体制约．这个条件是很强的．

我们已经知道，点群 G 中的元素，总是与某个绕轴的旋转相联的，由于要求保持 L 格子不变，这就导致对这类旋转的阶次有所限制，使得它不能取任意值．换言之,如果你随便取一个数作为 n 的值,这个 n 次旋转就不一定能使 L 格子在变换前后保持不变．下述定理就是说的这一点：

定理　晶体点群 G 中，可能的旋转轴次 n 不是任意的，只可能是 $n=1, 2, 3, 4, 6$．

证明　设 A、B 为 L 格子中的任意两个相邻的结点，l 为过 A 点且垂直于纸面的旋转角为 α 的轴．由于空间格子 L 的结点相互是等价点（具有共同的属性）,因此必定在 B 点也会有一轴 m, 它垂直于纸面，且有旋转角 α．现在令结点 B 和 A 分别绕轴 l、m 旋转 α 角，得到象 D 和 C, 因为 A、B 为 L 中的结点,以 l、m 为轴的 α 旋转是晶体点群中的元素，当然应保持格子 L 不变，所以 D 和 C 也一定是结点．并且有

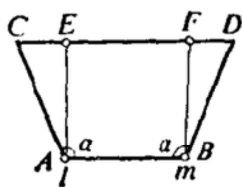


图　3-3

$$\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{AB}.$$

于是，连结 A、B、C、D成一等腰梯形，$AB /\!/ CD$，由于空间格子中相互平行的行列，其结点的间距（相邻两结点的距离）必相等，所以平行行列上任意两点的距离总是间距的整数倍，因此就有

$$\overline{CD}=N\cdot\overline{AB},$$

其中 N 为整数．现在过 A、B 点分别作 CD 的垂线 AE 和 BF，于是有

$$\begin{aligned}\overline{CD}&=\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}\\&=\overline{AC}\cos(180^\circ-\alpha)+\overline{AB}+\overline{BD}\cos(180^\circ-\alpha)\\&=\overline{AB}(1-2\cos\alpha).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad N=1-2\cos\alpha,$$

即

$$\cos\alpha=\frac{1-N}{2}.$$

由于$|\cos\alpha|\leqslant 1$，所以解得 N 的值为

N	3	2	1	0	-1
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
α	180°	120°	90°	60°	$0^\circ(360^\circ)$

相应于可能的旋转角：360°，180°，120°，90°，60°，其旋转轴次 $n=1, 2, 3, 4, 6$．定理证毕．

将这一定理用于前面讨论过的点群，符合晶体制约的第一类点群只可能有 11 种：

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6.$$

$$D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6.$$

$$T,\ O.$$

在第一类点群中再加入反演，就可以采用数学的方法得

到第二类点群.满足晶体制约的第二类点群只有21种,它们是

$$S_2,\ S_4,\ S_6,$$
$$C_{1h},\ C_{2h},\ C_{3h},\ C_{4h},\ C_{6h}.$$
$$C_{2v},\ C_{3v},\ C_{4v},\ C_{6v},$$
$$T_h,\ T_d,\ O_h,$$
$$D_{2h},\ D_{3h},\ D_{4h},\ D_{6h}.$$
$$D_{2d},\ D_{3d}.$$

至此可知，符合晶体制约的点群只可能有32种,现列表如下

符号	符号的意义	对称类型	数目
C_n	具有 n 次对称轴	$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_6$	5
i	反演	$i=S_2$	1
σ	反射	$\sigma=C_{1h}$	1
C_{nh}	除具有 n 次轴外，还具有与轴垂直的水平对称面; h 代表水平的意思	$C_{2h},\ C_{3h},\ C_{4h},\ C_{6h}$	4
C_{nv}	除具有 n 次轴外，还具有通过该轴的垂直对称面; v 代表垂直的意思	$C_{2v},\ C_{3v},\ C_{4v},\ C_{6v}$	4
D_n	具有 n 次轴及 n 个与之垂直的2次轴	$D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_6$	4
D_{nh}	h 的意义同前	$D_{2h},\ D_{3h},\ D_{4h},\ D_{6h}$	4
D_{nd}	d 表示在 D_n 中还有一个平分两个2次轴间夹角的对称面	$D_{2d},\ D_{3d}$	2
S_n	具有 n 次旋转反射轴	$S_4,\ S_6$	2
T	具有四个3次轴和三个2次轴(四面体的对称性)	T	1
T_h	h 的意义同前	T_h	1
T_d	d 的意义同前	T_d	1
O	具有三个互相垂直的4次轴及六个2次轴,四个3次轴	$O,\ O_h$	2
共计			32

以上讨论指出了32种点群分别相对应于晶体中的32种宏观对称类型. 在讨论过程中,把结点都看作是等价的,至于

晶格中可能存在的复杂情况并未加以考虑．实际上，晶体的对称性还要复杂一些，当对晶体进行微观考察时，可以看到结点处的原子图案尚可有不同的方向等，加之，进行微观考察时，晶体的尺度相对于微观的原子尺度来说，可以看作是无限延伸的．这样，原来被排除在晶体对称之外的平移，以及由平移、旋转和反演等合成的变换，又可能成为晶体的对称变换．显然，在对晶体作微观对称性讨论时，对称变换增加甚多，当然构成的对称性群也增多了．通过计算，可以知道共有 230 种．实际上，化学家总共发现的晶格结构大约 100 种左右．由统计知道其中重要的只有 30 个左右，特别重要的只有 15、16种．

群论在解决晶体的分类时，显示了重要的作用，这是群论的一种应用．其实，群论在数学中的应用还可追溯得更早．在晶体点群出现前一百年左右，法国数学家拉格朗日已经注意到，代数方程的可解性与它的根的对称性是有联系的．后来，数学家阿贝尔、伽罗瓦对此作了深入的研究，取得了重大的成就，这一问题获得了完美的解决，实际上群论是自此开始的．

利用群论对晶体进行分类，是群论在物理、化学领域的应用；利用群论去解决一般 n 次代数方程的可解性，是群论在数学领域的应用．两者有一共同之处，就是被应用的地方，都显示了对称性．解决晶体分类用群论，是因为晶体的格子结构具有对称性，或者说显示了图形的对称性；代数方程可解性问题的研究利用群论，是因为方程的系数和根之间存在着对称的依赖关系，或者也可以说显示了式的对称性．为此，我们可以想象，凡事物，不管它是实在的还是观念的，只要它具有对称性，那么就可以应用群论对它作定量的研究．

群论对现代学科基本粒子的研究的应用也是如此．大家

知道，一般地要想求解相应的偏微分方程组是困难的，往往要利用粒子所显现的对称性．么正幺模群的应用，导致一些重要成果．例如 1963 年美国科学家盖尔曼利用群论去研究基本粒子，曾正确预言新粒子 Ω^- 的存在，果然两年后在物理实验中发现了它．这个成果影响很大，以致群论成了研究高能物理时不可缺少的手段．

随着科学的发展，这种从代数中研究运算结构开始的观点在数学中也不断取得进展．二十世纪初，E. V. 亨丁顿为群等代数结构作了一般的公理化处理．到了三十年代，范德瓦尔登的《近世代数》问世，完成了代数领域系统公理化工作，他在序言中说："'抽象的'、'形式化的'或'公理化的'方向在代数领域中造成了新的增长，特别地在群论、域论、赋值论和超复数系等部门中引起了一系列新概念的形成，建立了许多新的联系，并导致了一系列深远的结果．本书的目的就是要将读者引入整个这一概念世界．"到四十年代，法国布尔巴基学派开始写作《数学原本》，在综合研究各类数学发展的基础上，推广了代数的结构观念，提出了以结构统一整个现代纯粹数学的观点．他们把数学归结为三类基本结构：代数结构（其中群就是最基本的），顺序结构，拓扑结构．在这基础上，可以交叉，衍生出许多子结构，多重结构．

总之，一百多年来，群论从产生、发展到今天，已取得了重大的成果．在数学诸领域，群论具有深刻的影响，在自然科学和技术领域如：基本粒子、量子化学、现代生物学、通讯编码、工程力学等方面成了强有力的工具，以至在人文科学方面也有了重要的应用．目前，群论在数学理论和应用领域仍很活跃，可以说群论在生长发展中．